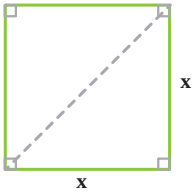
فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن $۲\sqrt{۶}$ متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به‌دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.



حل : به کمک رابطه ———— داریم : $x^۲ + x^۲ = (۲\sqrt{۶})^۲$

در نتیجه : $۲x^۲ = ۲۴$ و از آنجا $x^۲ = ۱۲$

بنابراین ———— این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که ———— مربع $\sqrt{۱۲}$ متر یا $۲\sqrt{۳}$ متر است.

همچنین : متر $۲\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} = ۴ \times ۲\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}$ = ———— مربع

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می‌توان آنها را با هم جمع یا تفریق کرد؛ مثلاً دو عبارت $۳\sqrt{۲}$ و $۷\sqrt{۲}$ دارای قسمت‌های رادیکالی یکسان هستند و داریم : $۷\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$ و $۷\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} = ۱۰\sqrt{۲}$

همچنین :

$$\sqrt{۱۲} + ۹\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳} + ۹\sqrt{۳} = ۱۱\sqrt{۳}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات $۲\sqrt{۵}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ یا عبارات $۷\sqrt{۲}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ یکسان نیستند.

کار در کلاس

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید :

$۳\sqrt{۷}$	$\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۲}$	$\frac{\sqrt{۵}}{۲}$	$۳\sqrt{a}$	$\sqrt{xy}$	$\sqrt{۲}$
$-۴\sqrt{۵}$	$\sqrt{۲}$	$۲\sqrt{۵}$	$۲\sqrt{b}$	$۲\sqrt{x}$	$\sqrt{۳}$
$۸\sqrt{۷}$	$۸\sqrt[۳]{۲}$	$-\frac{۲}{۳}\sqrt{۱۰}$	$-\frac{۱}{۵}\sqrt{a}$	$-۷\sqrt{x}$	$\sqrt{۵}$
$۲\sqrt{۵}$	$-۵\sqrt[۳]{۲}$	$-۲\sqrt{۱۰}$	$-۷\sqrt{b}$	$۴\sqrt{xy}$	$۶\sqrt{۲}$
$۱۱\sqrt{۷} - ۲\sqrt{۵}$	$\frac{۹}{۲}\sqrt[۳]{۲} + \sqrt{۲}$				

ساده کردن عبارت‌های رادیکالی

فعالیت

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.

الف) $\sqrt{۷۲}-\sqrt{۳۲}+\sqrt{۱۸}$

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به‌دست می‌آوریم :

(جاهای خالی را کامل کنید.)

$\sqrt{۷۲}=\sqrt{۶^۲\times ۲}=۶\sqrt{__}$

$\sqrt{۳۲}=\sqrt{۴^۲\times __}=۴\sqrt{__}$

$\sqrt{۱۸}=\sqrt{__}=۳\sqrt{۲}$

بنابراین : $\sqrt{۷۲}-\sqrt{۳۲}+\sqrt{۱۸}=۶\sqrt{__}-____+____=۵\sqrt{۲}$

ب) $\sqrt{۵۰}+\sqrt[۳]{۲۴}+\sqrt[۳]{۸۱}=\sqrt{۵^۲\times ۲}+\sqrt[۳]{۲^۳\times ۳}+\sqrt[۳]{۳^۳\times ۳}$

$=۵\sqrt{__}+۲\sqrt[۳]{__}+۳\sqrt[۳]{__}=۵\sqrt{__}+۵\sqrt[۳]{__}$

مثال ۱ : حاصل $\sqrt{۴۸}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})$ را به دو روش به‌دست آورده‌ایم؛ آنها را با هم مقایسه کنید.

الف) $\sqrt{۴۸}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=\sqrt{۴۸\times ۳}+\sqrt{۴۸\times ۲}=\sqrt{۴^۲\times ۳^۲}+\sqrt{۴^۲\times ۳\times ۲}$

$=\sqrt{(۴\times ۳)^۲}+۴\sqrt{۶}=۱۲+۴\sqrt{۶}$

ب) $\sqrt{۴۸}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=\sqrt{۴^۲\times ۳}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=۴\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=۱۲+۴\sqrt{۶}$

مثال ۲ : حاصل $(\sqrt{۱۲}+\sqrt{۲۷}-\sqrt{۴۸})\div\sqrt{۳}$ را به‌دست آورید.

$\sqrt{۱۲}+\sqrt{۲۷}-\sqrt{۴۸}=۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۱) $\sqrt{۹۸}-\sqrt{۵۰}+\sqrt{۱۲۸}$

۲) $\sqrt{۲۷}-\sqrt{۱۲}-\sqrt{۷۵}+\sqrt{۴۸}$

۳) $۵\sqrt[۳]{۲}+۳\sqrt[۳]{۵۴}-۴\sqrt[۳]{۱۲۸}$

۴) $\sqrt{۴+\frac{۱}{۸۱}+\frac{۴}{۹}}$

۵) $(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(۳\sqrt{۲}-\sqrt{۳})$

گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی یا آسان‌تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛ به‌طور مثال برای محاسبهٔ $\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}$ باید عدد ۲۰ را بر $\sqrt{۲}$ تقسیم کنیم؛ در حالی که می‌توانیم مخرج کسر را به‌صورت زیر گویا کنیم :

$$\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۲}=۱۰\sqrt{۲}$$

فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هرجا لازم است، راه‌حل را کامل کنید.

الف) $\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}\times___=\frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$

ب) $\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵^۲}}{\sqrt[۳]{۵^۲}}=\frac{___}{۵}$

ج) $\frac{۴}{\sqrt{\frac{۲}{۳}}}=\frac{۴}{\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\times___=___$

د) $\frac{۲\sqrt[۳]{۷}}{\sqrt[۳]{۲^۲}}\times___=\frac{۲\sqrt[۳]{۱۴}}{۲}=_____$

هـ) $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}}\times___=\frac{\sqrt{۲x}}{x}$ $(x>۰)$

و) $\frac{۵}{\sqrt[۳]{z^۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{___}}{\sqrt[۳]{___}}=_____$ $(z\neq ۰)$

کار در کلاس

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۶}{\sqrt[۳]{۲}}$ ب) $\frac{۲}{\sqrt{۳۲}}$

ج) $\frac{۱۲}{\sqrt{۶}}$ د) $\frac{۵}{\sqrt[۳]{۳x}}$

$(x\neq ۰)$

تمرین

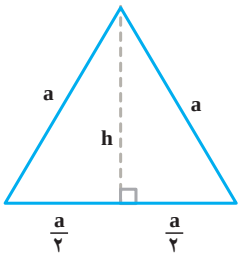
۱ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $۲\sqrt{۵۰}+\sqrt{۳۲}+۲\sqrt{۷۲}$ ج) $\sqrt[۳]{۲۷^{۲}}$ هـ) $(\sqrt{۲}-\sqrt{۵})(\sqrt{۱۰}+\sqrt{۲})$

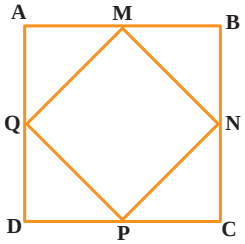
ب) $\sqrt{۸}+\sqrt{۱۲۸}-\sqrt{۵۰}$ د) $\sqrt[۳]{\frac{-۲۷}{۶۴}}$ و) $۲\sqrt{۴۸}-۳\sqrt{۲۷}$

۲ــ اگر $x<۰$ باشد، حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید. $۲\sqrt{x^{۲}}-x$

۳ــ محیط و مساحت مربعی به ضلع $۳\sqrt{۵}$ سانتی‌متر را به‌دست آورید.



۴ــ شکل مقابل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ضلع a نشان می‌دهد. اندازهٔ ارتفاع h را برحسب a به‌دست آورید؛ سپس مساحت آن‌را برحسب a بنویسید.



۵ــ نقاط M، N، P و Q وسط‌های اضلاع مربع ABCD هستند. اگر مساحت مربع ABCD، ۱۰۰ مترمربع باشد، محیط مربع MNPQ چقدر است؟

۶ــ در جاهای خالی علامت > یا = یا < بگذارید :

$\sqrt{۵}+\sqrt{۴} \bigcirc \sqrt{۵+۴}$ $\qquad$ $۴ \bigcirc \sqrt{۳^۲+۲^۲}$

$\sqrt{\frac{۳}{۱۱}} \bigcirc \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۱}}$ $\qquad$ $\sqrt{۳^۲+۴^۲} \bigcirc ۵$

۷ــ در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید :

الف) $\sqrt{\square}=۱۰$ $\qquad$ ب) $۲\sqrt{\square}=۶$ $\qquad$ ج) $\sqrt{\square}=\frac{۱}{۳}$ $\qquad$ د) $\sqrt[\bigcirc]{۸}=۲$

هـ) $\frac{۲^{-۵}}{۲^{\bigcirc}}=\sqrt{۶۴}$ $\qquad$ و) $\frac{(\sqrt{۱۲})^۲}{۴\times ۳^۲}=۳^{\bigcirc}$ $\qquad$ ز) $\frac{m^۶\times m^{-۲}}{m^{\bigcirc}}=m$ $\qquad$ ح) $۹\sqrt[۳]{-۲۷}=\frac{\bigcirc^۳}{(-۴)^۳}$

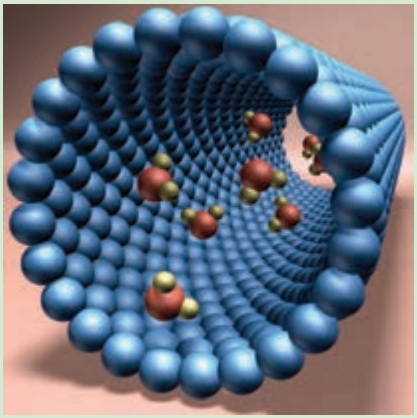
۸ــ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}$ $\qquad$ ب) $\frac{۲}{\sqrt[۳]{a^۲}}$ $\qquad$ ج) $\frac{۲}{\sqrt{۷}}$

۹ــ آیا تساوی $\sqrt{x^۲}=(\sqrt{x})^۲$ همیشه درست است؟ توضیح دهید.

الف) تساوی همیشه درست است. ب) تساوی همیشه نادرست است. ج) اگر $x\geq ۰$، تساوی درست است.

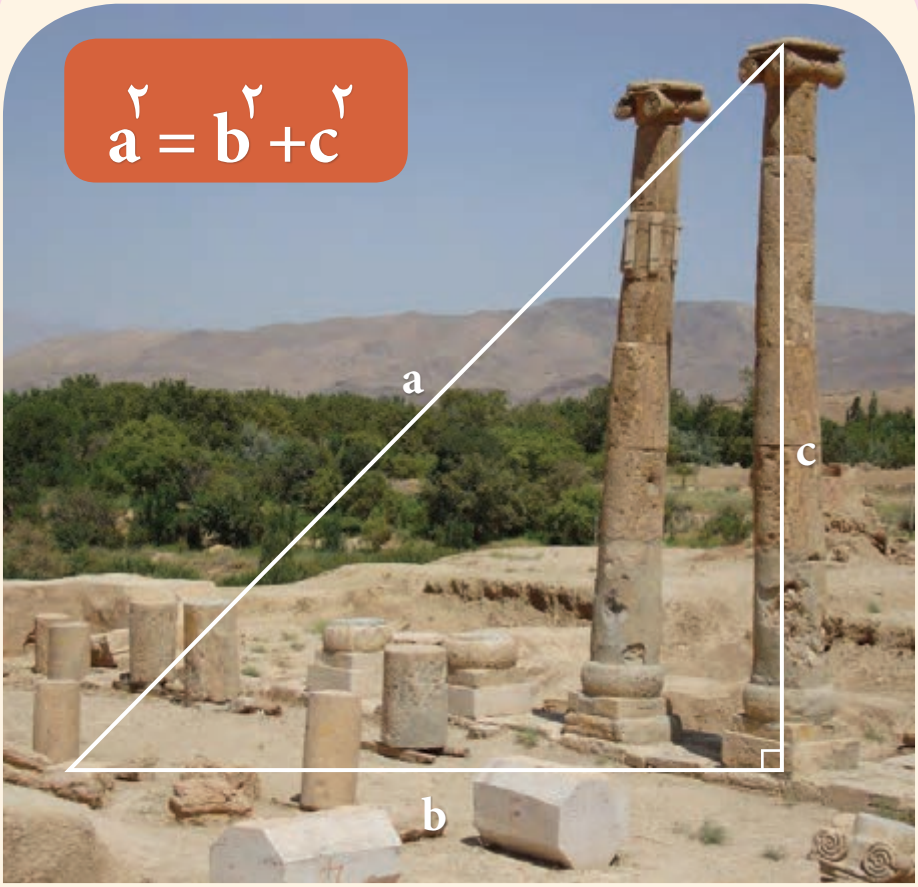
خواندنی



فنّاوری نانو مجموعه‌ای از فرایندهای تفکیک، ادغام و تشکیل مواد در حد یک اتم یا مولکول است. یک نانومتر برابر $۱۰^{-۹}$ متر؛ یعنی صدهزار برابر از قطر موی سر انسان کوچک‌تر است. کشور عزیز ما ایران بین ده کشور برتر در حوزهٔ فنّاوری نانو قرار دارد.

فصل ۵

عبارت‌های جبری



اثر باستانی «هیلیونها» ــ استان مرکزی ــ روستای خورهه

عبارت‌های جبری کاربردهای فراوانی دارند. به‌طور مثال رابطهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه یک تساوی بین دو عبارت جبری است که از آن در محاسبات هندسی استفاده می‌شود.